I Costi

Approccio costi-benefici

La microeconomia studia i processi decisionali in condizioni di scarsità.

Le scelte vengono effettuate seguendo l'approccio costi-benefici:

- x: attività da effettuare
- $B(x)$: beneficio dell'attività
- $C(x)$: costo dell'attività

Se $B(x) > C(x)$, allora si sceglie x.
Se $B(x) < C(x)$, allora x non viene scelta.

Costo opportunità

Compiere l'azione x significa escludere l'azione y, la migliore alternativa.
Il **costo opportunità** di x è il guadagno a cui si rinuncia scegliendo x invece di y.

- Si prendono decisioni sbagliate quando si trascura il valore delle opportunità tralasciate.
- Esempio: andare al mare oppure andare a lavoro.

Costi:

Costo esplicito: valore delle risorse che comportano esborso monetario.
Costo implicito: valore delle risorse proprie impiegate (es. tempo, reddito alternativo).
Costo non recuperabile (*sunk*): costo già sostenuto che non può essere recuperato.
Esempio: una volta costruito un impianto, il costo sostenuto è non recuperabile.

Minimizzazione dei costi

Dato un livello desiderato di output Q_0 e una tecnologia di produzione $Q = f(L, K)$, l'impresa deve minimizzare i costi:

$$\min \ TC = wL + rK \quad \text{sotto il vincolo } Q_0 = f(L, K)$$

L'equazione dell'isocosto è:

$$TC = wL + rK \Rightarrow K = \frac{TC}{r} - \frac{w}{r}L$$

Condizione di ottimo: l'impresa sceglie la combinazione di L e K in cui vale la condizione di tangenza:

$$MRTS_{L,K} = \frac{MP_L}{MP_K} = \frac{w}{r}$$

Curve di costo di lungo periodo

La curva del costo totale di lungo periodo mostra come varia il costo totale minimo per diversi livelli di quantità prodotta, supposti:

- costanti i prezzi degli input;
- scelta ottimale degli input da parte dell'impresa (minimizzazione dei costi).

Costo medio di lungo periodo: $AC(Q) = \frac{TC(Q)}{Q}$ è il costo unitario per quantità prodotta.

Costo marginale di lungo periodo: $MC(Q) = \frac{\Delta TC(Q)}{\Delta Q}$ è il saggio di variazione del costo totale di lungo periodo al variare dell'output (ovvero la pendenza della curva di costo totale).

Relazioni:

- Se il costo medio diminuisce all'aumentare dell'output, si hanno economie di scala e rendimenti di scala crescenti;
- Se il costo medio aumenta all'aumentare dell'output, si hanno diseconomie di scala e rendimenti di scala decrescenti;
- Se il costo medio rimane costante all'aumentare dell'output non si hanno né economie né diseconomie di scala, e i rendimenti di scala sono costanti;
- Il livello più basso di Q per il quale il costo medio di lungo periodo è minimo è detta scala minima efficiente (MES).

Curve di costo di breve periodo

Nel breve periodo almeno un input (es. il capitale) è fisso. Le principali curve sono:

- **Costo Totale di breve periodo (STC)**: $STC(Q) = TVC(Q) + TFC$;
- **Costo Totale Variabile (TVC)**: spesa in input variabili;
- **Costo Totale Fisso (TFC)**: spesa in input fissi, indipendente da Q (quantità prodotta).

NOTA: Nel breve periodo uno o più fattori sono fissi l'impresa ha maggiori vincoli che nel lungo periodo. Quindi, **la curva di costo totale di breve periodo si trova sempre al di sopra di quella di lungo periodo**.

I **costi medi** si ottengono dividendo per Q la curva di costo totale di breve:

$$SAC(Q) = AVC(Q) + AFC(Q)$$

dove:

- $SAC(Q) = STC(Q)/Q$: costo medio totale
- $AVC(Q) = TVC(Q)/Q$: costo variabile medio
- $AFC(Q) = TFC/Q$: costo fisso medio

Costo marginale di breve periodo:

$$SMC(Q) = \frac{\Delta STC(Q)}{\Delta Q}$$

NOTA: La curva di costo medio di lungo periodo è l'inviluppo delle curve di costo medio di breve periodo.

Esercizio 1

La funzione del costo totale del costo totale di un'impresa perfettamente concorrenziale è:

$$TC(Q) = TFC + 3Q + Q^2,$$

dove TFC denota l'ammontare dei costi fissi totali dell'impresa.

(A) Supponendo che tutti i costi totali siano "sunk" e che questi ammontino a $TFC = 100$, determinate le funzioni del costo medio (AC) e marginale (MC), e tracciateli in un unico grafico;

(B) Determinate la scala minima efficiente (MES);

(C) Studiate come varierebbe la MES se il costo fisso totale passasse da $TFC = 100$ a $TFC' = 144$ e illustrate il risultato di statica comparata trovato per mezzo di un grafico.

Nota teorica – Costo medio e marginale

Costo medio (AC): rapporto tra costo totale e quantità prodotta: $AC(Q) = \frac{TC(Q)}{Q}$.

Costo marginale (MC): variazione del costo totale al variare di una unità di output: $MC(Q) = \frac{dTC(Q)}{dQ}$.

Soluzione

(A) Se $FC = 100$, le funzioni del costo medio e marginale sono rispettivamente pari a:

$$AC(Q) = \frac{TC(Q)}{Q} = \frac{100 + 3Q + Q^2}{Q} = \frac{100}{Q} + 3 + Q$$

$$MC(Q) = \frac{dTC(Q)}{dQ} = 3 + 2Q$$

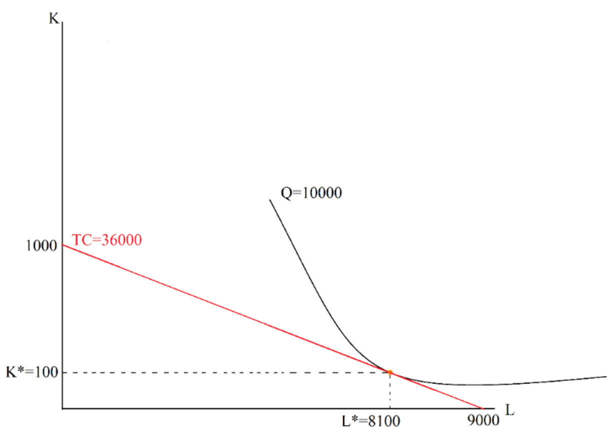

Figura 1: Grafico delle curve di costo medio e marginale.

(B) La scala minima efficiente (MES) è il livello di output più basso in corrispondenza del quale la curva di costo medio raggiunge il suo punto di minimo. Un altro modo per identificare la MES è quello di identificare il livello di output in corrispondenza del quale la curva del costo marginale interseca la curva del costo medio.

Se seguiamo la prima strada (punto di minimo della curva del costo medio), la MES può essere trovata risolvendo, per Q, la seguente equazione:

$$\frac{dAC(Q)}{dQ} = 0 \Rightarrow -\frac{100}{Q^2} + 1 = 0 \Rightarrow Q_{MES} = \sqrt{100} = 10 \quad \text{[la radice negativa non va considerata].}$$

Se invece scegliamo di seguire la seconda strada (punto di intersezione tra costo medio e marginale), allora la MES può essere ottenuta risolvendo, per Q, il seguente sistema algebrico:

$$\begin{cases} AC(Q) = \frac{100}{Q} + 3 + Q \\ MC(Q) = 3 + 2Q \\ AC(Q) = MC(Q) \end{cases} \Rightarrow \frac{100}{Q} + 3 + Q = 3 + 2Q \Rightarrow Q_{MES} = 10$$

In conclusione, la MES dell'impresa è: $Q_{MES} = 10$.

(C) In generale, in presenza di una funzione del costo totale del tipo $TC(Q) = TFC + 3Q + Q^2$, è possibile dimostrare che la MES è pari a:

$$Q_{MES} = \sqrt{TFC}$$

Pertanto, se il TFC passasse da 100 a 144, allora la MES passerebbe da $Q_{MES} = 10$ a $Q'_{MES} = 12$, allargandosi di 2 unità fisiche di prodotto.

Poiché la curva del costo marginale rimane invariata a seguito di un aumento di TFC, affinché la MES possa aumentare di 2 unità fisiche è necessario che la curva del costo medio si sposti verso l'alto e a destra.

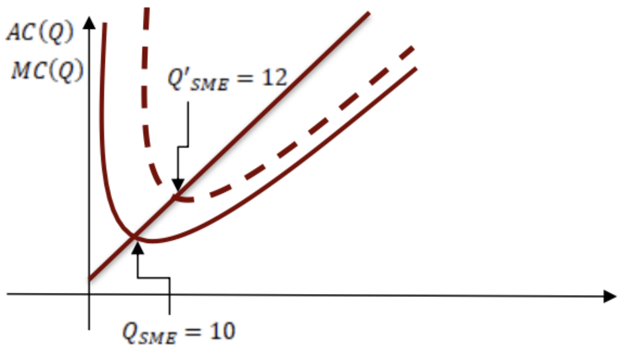

Figura 2: Risultato grafico della variazione della MES.

Esercizio 2

Considerate la funzione di produzione Cobb-Douglas di una generica impresa price-taker:

$$Q = 100L^{1/3}K^{1/3}$$

(A) Supponendo che il prezzo del capitale sia $r = 1$ e che il prezzo del lavoro sia $w = 9$, determinate la retta dell'isocosto;

(B) Determinate le funzioni di domanda derivate di lungo periodo del capitale, K, e del lavoro, L;

(C) Calcolate a quanto ammonta il costo minimo di lungo periodo del piano di produzione $Q = 100$ e disegnate la scelta ottima dell'impresa nel piano $\langle L, K\rangle$.

Retta dell'isocosto

La retta dell'isocosto rappresenta tutte le combinazioni di lavoro L e capitale K che l'impresa può acquistare dato un certo costo totale TC, e prezzi degli input w (lavoro) e r (capitale):

$$TC = wL + rK$$

Risolvendola per K, si ottiene:

$$K = \frac{TC}{r} - \frac{w}{r}L$$

Interpretazione:

- Intercetta verticale: $\frac{TC}{r}$
- Pendenza: $-\frac{w}{r}$

Tutte le rette dell'isocosto hanno la stessa pendenza ma intercette diverse, a seconda del livello di spesa.

Soluzione

(A) Un isocosto è l'insieme delle "tecniche" di produzione – vale a dire delle combinazioni dei due input L e K – che determinano lo stesso costo di produzione complessivo. Dati i prezzi dei fattori produttivi, w per l'input L e r per l'input K, l'isocosto individua le combinazioni acquistabili di L e K che consentono di mantenere costante il costo totale di produzione dell'impresa, TC. In un piano cartesiano $\langle L, K\rangle$, la retta dell'isocosto è data dalla seguente equazione:

$$TC = wL + rK$$

Sostituendo a w e r i rispettivi valori numerici e risolvendo per K otteniamo:

$$K = TC - 9L$$

(B) La funzione del costo totale dell'impresa è: $TC = wL + rK$. Per determinare le due funzioni di domanda degli input, risolviamo il seguente problema di minimizzazione:

$$\min_{L\geq 0, K\geq 0}\{wL + rK\}, \quad \text{s. v.: } Q = 100L^{1/3}K^{1/3}$$

Geometricamente, l'allocazione ottimale individua la coordinata cartesiana in cui l'isoquanto di produzione e la retta di isocosto sono tangenti. Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} MRTS_{L,K} = \frac{w}{r} \\ Q = 100L^{1/3}K^{1/3} \end{cases}$$

Nel caso della funzione di produzione Cobb-Douglas, il saggio marginale di sostituzione tecnica è:

$$MRTS_{L,K} = \frac{MP_L}{MP_K} = \frac{K}{L}$$

Inserendo quanto trovato nella prima equazione del precedente sistema otteniamo:

$$\begin{cases} \frac{K}{L} = \frac{w}{r} \\ Q = 100L^{1/3}K^{1/3} \end{cases}$$

Sostituendo nella condizione di ottimo:

$$\frac{K}{L} = \frac{w}{r} \Rightarrow K = \frac{w}{r}L$$

Sostituendo questa espressione nella funzione di produzione:

$$\begin{aligned} Q &= 100 \cdot L^{1/3} \cdot K^{1/3} = 100 \cdot L^{1/3} \cdot \left(\frac{w}{r}L\right)^{1/3} \\ &= 100 \cdot \left(\frac{w}{r}\right)^{1/3} \cdot L^{1/3} \cdot L^{1/3} \\ &= 100 \cdot \left(\frac{w}{r}\right)^{1/3} \cdot L^{2/3} \end{aligned}$$

Isolando L:

$$\begin{aligned} L^{2/3} &= \frac{Q}{100} \cdot \left(\frac{r}{w}\right)^{1/3} \\ L &= \left[\frac{Q}{100} \cdot \left(\frac{r}{w}\right)^{1/3}\right]^{3/2} = \frac{Q^{3/2} \cdot r^{1/2}}{1000 \cdot w^{1/2}} \end{aligned}$$

Infine, da $K = \frac{w}{r}L$, si ottiene:

$$K = \frac{w}{r} \cdot \frac{Q^{3/2} \cdot r^{1/2}}{1000 \cdot w^{1/2}} = \frac{Q^{3/2} \cdot w^{1/2}}{1000 \cdot r^{1/2}}$$

Quindi, le due funzioni di domanda derivate degli input sono:

$$L(w, r, Q) = \frac{Q^{3/2}\sqrt{r}}{1000\sqrt{w}}, \quad K(w, r, Q) = \frac{Q^{3/2}\sqrt{w}}{1000\sqrt{r}}$$

(C) Sostituendo $L(w, r, Q)$ e $K(w, r, Q)$ nella funzione del costo totale:

$$TC = wL + rK = w \cdot \frac{Q^{3/2}\sqrt{r}}{1000\sqrt{w}} + r \cdot \frac{Q^{3/2}\sqrt{w}}{1000\sqrt{r}} = 2 \cdot \frac{Q^{3/2}\sqrt{rw}}{1000}$$

Semplificando:

$$TC(w, r, Q) = \frac{Q^{3/2}\sqrt{rw}}{500}$$

Per $w = 9, r = 1, Q = 100$:

$$TC(9, 1, 100) = 6$$

Esercizio 3

Considerate la funzione di produzione CES:

$$Q = (\sqrt{L} + \sqrt{K})^2$$

(A) Determinate le funzioni di domanda condizionata di lungo periodo del capitale, K e del lavoro, L.

(B) Determinate il sentiero di espansione dell'output.

(C) Calcolate a quanto ammonta il costo di produzione minimo del piano $Q = 10.000$, e disegnate la scelta ottima dell'impresa nel piano cartesiano ⟨L, K⟩ quando w = 4 e r = 36.

Soluzione

(A) La domanda di un input di produzione è una domanda derivata che dipende dalla domanda del bene finale prodotto con quel fattore. Nel caso della tecnologia di produzione in esame, le due domande derivate dipendono dal piano (o obiettivo) di produzione scelto dalla dirigenza aziendale, il quale – sua volta –dipende dalla domanda di mercato del bene finale prodotto dall'impresa. Per determinare le due funzioni di domanda condizionata di lungo periodo di L e di K risolviamo il seguente problema di minimizzazione:

$$min\ TC = wL + rK$$

sotto il vincolo:

$$Q = (\sqrt{L} + \sqrt{K})^2$$

Il sistema che risolve questo problema di minimizzazione vincolato è:

$$\begin{cases} MRTS_{L,K} = \frac{w}{r} \\ Q = (\sqrt{L} + \sqrt{K})^2 \end{cases}$$

Il saggio marginale di sostituzione tecnica è

$$MRTS_{L,K} = \frac{MP_L}{MP_K} = 2(\sqrt{L} + \sqrt{K})\left(\frac{1}{2}L^{-1/2}\right)\frac{1}{2(\sqrt{L} + \sqrt{K})\left(\frac{1}{2}K^{-1/2}\right)} = \sqrt{\frac{K}{L}}$$

per cui il precedente sistema può essere riscritto nel seguente modo:

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{K}{L}} = \frac{w}{r} \\ Q = (\sqrt{L} + \sqrt{K})^2 \end{cases}$$

Risolviamo il sistema per sostituzione:

$$\sqrt{K} = \frac{w}{r}\sqrt{L}$$

che inseriamo nella seconda equazione:

$$Q = \left(\sqrt{L} + \frac{w}{r}\sqrt{L}\right)^2 = \left[\sqrt{L}\left(1 + \frac{w}{r}\right)\right]^2 = \left[\sqrt{L}\left(\frac{r+w}{r}\right)\right]^2$$

Esplicitiamo per L per ottere la domanda condizionata:

$$\sqrt{L} = \sqrt{Q}\frac{r}{r+w} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{Qr^2}{(r+w)^2}$$

la funzioni di domanda condizionata di K sarà perciò:

$$K = \left(\frac{w}{r}\right)^2 L = \left(\frac{w}{r}\right)^2 \frac{Qr^2}{(r+w)^2} = \frac{Qw^2}{(r+w)^2} \tag{1}$$

(B) Il sentiero di espansione dell'output (o del prodotto) congiunge le tecniche di produzione ottimali dell'impresa per tutti i possibili livelli di output, una volta fissati i prezzi degli input. Nel caso dell'impresa in esame, il sentiero di espansione del prodotto è ricavabile dalla prima delle due equazioni che formano il sistema algebrico che identifica l'allocazione ottimale dell'impresa:

$$MRTS_{L,K} = \frac{w}{r}$$

Nel caso della funzione di produzione, $Q = (\sqrt{L} + \sqrt{K})^2$, si ha che l'equazione che identifica il sentiero di espansione dell'output si scrive come:

$$\sqrt{\frac{K}{L}} = \frac{w}{r}$$

Risolvendo per K è possibile concludere che il sentiero di espansione dell'impresa è lineare in uno spazio ⟨L,K⟩ ed è dato dall'equazione:

$$K = \left(\frac{w}{r}\right)^2 L$$

(C) Sostituendo le funzioni di domanda condizionata $L(w, r, Q)$ e $K(w, r, Q)$ trovate al punto (A) nella funzione del costo totale otteniamo:

$$TC(w, r, Q) = wL(w, r, Q) + rK(w, r, Q)$$

$$\Rightarrow TC(w, r, Q) = w\frac{Qr^2}{(r+w)^2} + r\frac{Qw^2}{(r+w)^2}$$

Per w= 4, r=36 e Q=10.000, il costo di produzione totale minimo dell'impresa ammonta a:

$$TC(4, 36, 10000) = 36000$$

mentre le quantità ottimali dei due input saranno pari a:

$$L^* = \frac{36^2 \cdot 10000}{40^2} = 8100; \quad K^* = \frac{4^2 \cdot 10000}{40^2} = 100$$

Il seguente grafico riporta la scelta ottimale dell'impresa nel piano$\langle$L,K$\rangle$:

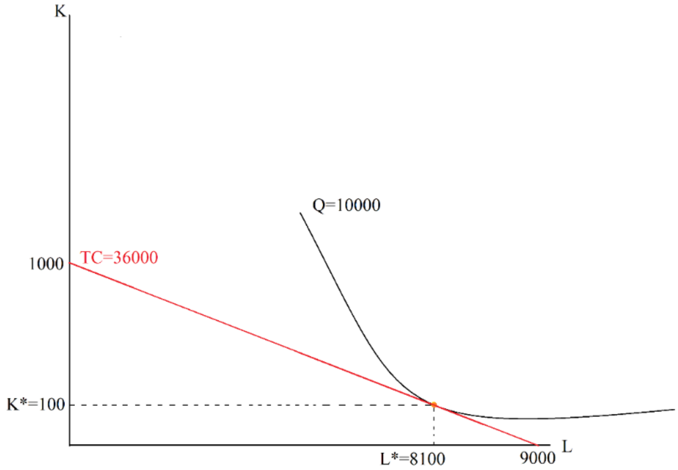

Figura 3: Scelta Ottimale

Esercizio 4

Un'impresa price-taker è dotata della seguente funzione di produzione di breve periodo:

$$Q = L^{1/2}H^{1/2} + 5\bar{K}$$

dove L e H indicano, rispettivamente, le quantità di lavoro non qualificato e qualificato utilizzate dall'impresa per la produzione di Q, e $\bar{K}$ indica la quantità, costante nel breve periodo, dell'input capitale.

(A) Determinate le funzioni di domanda condizionate degli unici fattor di produzione variabili;

(B) Determinate la funzione del costo totale minimo di breve periodo dell'impresa;

(C) Se l'impresa intendesse portare a compimento il piano di produzione $\bar{Q} = 1000$ e i prezzi degli input fossero rispettivamente $w_L = 4$ (salario non qualificato), $w_H = 16$ (salario qualificato) e $r = 1$(costo d'uso del capitale), quale sarebbe il costo totale minimo da sostenere nel caso in cui $\bar{K} = 150$?

Soluzione

(A) L'impresa è chiamata a risolvere il seguente problema di minimizzazione del costo totale di breve periodo:

$$min\{w_L L + w_H H + r\bar{K}\}$$

sotto il vincolo rappresentato dalla funzione di produzione:

$$Q = L^{1/2}H^{1/2} + 5\bar{K}$$

Il sistema che risolve questo problema di minimizzazione vincolato è dato dalla seguente coppia di equazioni:

$$\begin{cases} MRTS_{L,H} = \frac{w_L}{w_H} \\ Q = L^{1/2}H^{1/2} + 5\bar{K} \end{cases}$$

in due incognite: L e H. Il saggio marginale di sostituzione tecnica tra gli input L e H è:

$$MRTS_{L,H} = \frac{MP_L}{MP_H} = \frac{H}{L}$$

pertanto, il precedente sistema può essere riscritto nel seguente modo:

$$\begin{cases} \frac{H}{L} = \frac{w_L}{w_H} \\ Q = L^{1/2}H^{1/2} + 5\bar{K} \end{cases}$$

Operando per sostituzione è possibile ottenere le seguenti funzioni di domanda condizionata dei due input variabili:

$$L(w_L, w_H, r, K, Q) = w_L^{-1/2} w_H^{1/2}(Q - 5K)$$
$$H(w_L, w_H, r, K, Q) = w_L^{1/2} w_H^{-1/2}(Q - 5K)$$

(B) Sostituendo le funzioni di domanda condizionata $L(w_L, w_H, r, \bar{K}, Q)$ e $H(w_L, w_H, r, \bar{K}, Q)$ trovate al punto **(A)** nella funzione del costo totale, otteniamo (dopo varie semplificazioni) la seguente funzione del costo totale minimo di breve periodo:

$$
\begin{aligned}
TC &= w_L L(w_L, w_H, r, \bar{K}, Q) + w_H H(w_L, w_H, r, \bar{K}, Q) + r\bar{K} \\
&= w_L \left(w_L^{-1/2} w_H^{1/2} (Q - 5\bar{K}) \right) + w_H \left(w_L^{1/2} w_H^{-1/2} (Q - 5\bar{K}) \right) + r\bar{K} \\
&= w_L^{1/2} w_H^{1/2} (Q - 5\bar{K}) + w_L^{1/2} w_H^{1/2} (Q - 5\bar{K}) + r\bar{K} \\
&= 2 w_L^{1/2} w_H^{1/2} (Q - 5\bar{K}) + r\bar{K}
\end{aligned}
$$

(C) Se $\bar{K} = 150, w_L = 4, w_H = 16, r = 1$ il costo di produzione totale minimo relativo al piano $\bar{Q} = 1000$ ammonta a:

$$TC(4, 16, 1, 150, 1000) = 2 \cdot 4^{1/2} 16^{1/2} (1000 - 5 \cdot 150) + 1 \cdot 150 = 4150$$