Teoria della Produzione

Nota teorica – Concetti introduttivi

- Le risorse produttive come il lavoro, gli impianti, le materie prime, che le imprese usano per produrre beni e servizi, sono detti **input** o **fattori di produzione**.
- Il volume di beni e servizi che un'impresa produce è detto **output**.
- La **produzione** trasforma gli input in output.
- La **tecnologia** determina la quantità di output che è possibile ottenere da una data combinazione di input.

Nota teorica – Produzione e funzione di produzione

Le imprese trasformano **input** (lavoro, capitale, materie prime) in **output** (beni e servizi) attraverso un processo produttivo. La **tecnologia** definisce la quantità massima di output ottenibile da una data combinazione di input.
La **funzione di produzione** descrive questa relazione:

$$Q = f(L) \quad \text{o} \quad Q = f(L, K)$$

dove Q è l'output, L il lavoro e K il capitale. La funzione di produzione definisce la massima quantità di output che può essere prodotta con una qualunque combinazione degli input disponibili.
Una combinazione di input è detta **tecnologicamente efficiente** se consente di ottenere la massima quantità possibile di output.

Esercizio 1

Considerate la funzione di produzione: $Q = 2L$

(A) Studiate l'andamento del prodotto medio e del prodotto marginale.

(B) Disegnate il grafico della funzione di produzione (diagramma superiore) e del prodotto medio e marginale (diagramma inferiore).

(C) Con $L = 6$, valutate i seguenti piani di produzione: $Q_A = 4, Q_B = 5, Q_C = 14, Q_D = 17, Q_E = 12$. Stabilite se sono tecnologicamente efficienti, inefficienti o non conseguibili.

Nota teorica – Prodotto totale marginale e medio

Nel caso di un solo input (ad esempio il lavoro L), si distinguono tre concetti:

- **Prodotto totale (Q)**: quantità totale di output prodotta.
- **Prodotto medio (AP_L)**: output medio per unità di lavoro, $AP_L = \frac{Q}{L}$
  - Per un dato valore L_0 , è pari alla pendenza della semiretta uscente dall'origine degli assi e che interseca il prodotto totale in corrispondenza di L_0.
- **Prodotto marginale (MP_L)**: variazione dell'output per un incremento unitario del lavoro, $MP_L = \frac{\Delta Q}{\Delta L}$
  - Per un dato valore L_0, è pari alla pendenza della tangente alla funzione del prodotto totale in corrispondenza di L_0.

Relazione importante:

- Se $AP_L \uparrow \Rightarrow MP_L > AP_L$;
- Se $AP_L \downarrow \Rightarrow MP_L < AP_L$;
- Se AP_L è massimo $\Rightarrow MP_L = AP_L$.

Legge dei rendimenti marginali decrescenti: da un certo punto in poi, il prodotto marginale si riduce all'aumentare della quantità di fattore impiegato.

Soluzione

(A) Con riferimento ad un generico fattore, o input, di produzione L, il prodotto medio è il rapporto tra il prodotto totale, o output, e la quantità dell'input utilizzata per la produzione, mentre il prodotto marginale, o produttività marginale, è l'incremento di produzione conseguente all'aumento dell'impiego del fattore. Le due formule che descrivono l'andamento del prodotto medio e del prodotto marginale sono:

$$AP_L = \frac{Q}{L}, \quad MP_L = \frac{\Delta Q}{\Delta L}$$

Nel caso della funzione di produzione in analisi è possibile osservare che:

$$AP_L = MP_L = 2$$

Entrambe queste grandezze, dunque, tendono a variare in maniera costante al variare di L.

(B) Il diagramma superiore indica l'andamento della funzione di produzione, mentre il diagramma inferiore indica l'andamento del prodotto medio (linea piena rossa) e del prodotto marginale (linea nera tratteggiata).

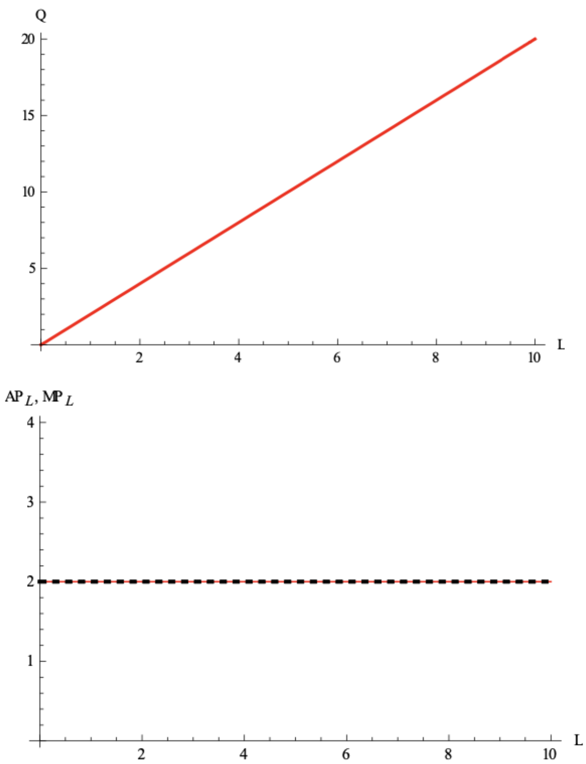

Figure 1: Funzione di produzione (linea rossa); Prodotto medio (linea rossa), Prodotto marginale (linea tratteggiata).

(C) La funzione, o tecnologia, di produzione è $Q = 2L$. Per $L = 6$, il livello di output tecnologicamente efficiente è $Q = 2 \cdot 6 = 12$.
Pertanto, per $L = 6$, tutti i piani di produzione tali che $Q < 12$ saranno piani tecnologicamente inefficienti, mentre tutti i piani tali che $Q > 12$ saranno piani tecnologicamente inattuabili. Da ciò è possibile concludere che:

1. Il piano **E** è l'unico piano tecnologicamente efficiente;
2. I piani **A** e **B** sono tecnologicamente inefficienti;
3. I piani **C** e **D** sono tecnologicamente inattuabili.

Tutte queste considerazioni possono essere riassunte attraverso il seguente diagramma:

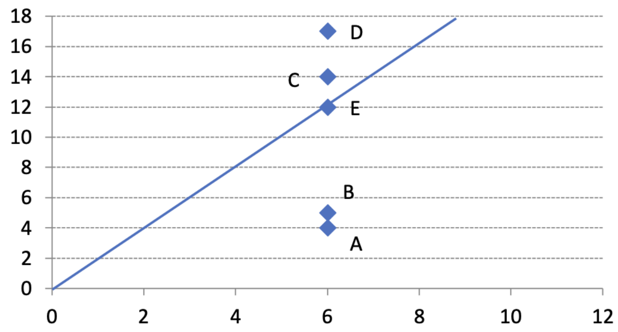

Figure 2: Livelli di output

Esercizio 2

Considerate la funzione di produzione: $Q = 10L - L^2$

(A) Studiate l'andamento del prodotto medio e del prodotto marginale.

(B) Disegnate il grafico della funzione di produzione (diagramma superiore) e del prodotto medio e marginale (diagramma inferiore).

(C) Con $L = 2$, valutate i seguenti piani: $Q_A = 18, Q_B = 16, Q_C = 14, Q_D = 24, Q_E = 6$. Classificateli.

Soluzione

(A) La produttività media, o prodotto medio, di un fattore o input di produzione misura la produzione totale per unità di fattore utilizzato, mentre il prodotto marginale misura l'incremento di prodotto ottenuto da un'unità aggiuntiva dello stesso input. Le due formule che descrivono l'andamento del prodotto medio e marginale sono:

$$AP_L = \frac{Q}{L}, \quad MP_L = \frac{\Delta Q}{\Delta L}$$

Nel caso della funzione di produzione in analisi è possibile scrivere:

$$AP_L = \frac{10L - L^2}{L} = 10 - L, \quad MP_L = \frac{d(10L - L^2)}{dL} = 10 - 2L$$

Entrambe queste due grandezze, dunque, tendono a decrescere in maniera lineare all'aumentare di L.

(B) Il diagramma superiore indica l'andamento della funzione di produzione, mentre il diagramma inferiore indica l'andamento del prodotto medio (linea piena rossa) e del prodotto marginale (linea nera tratteggiata).

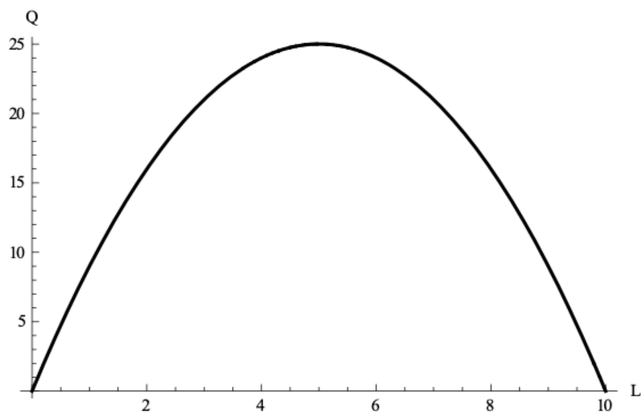

Figure 3: Funzione di produzione

Dal diagramma inferiore è possibile osservare come la retta del prodotto marginale si collochi sempre al di sotto della retta del prodotto medio:

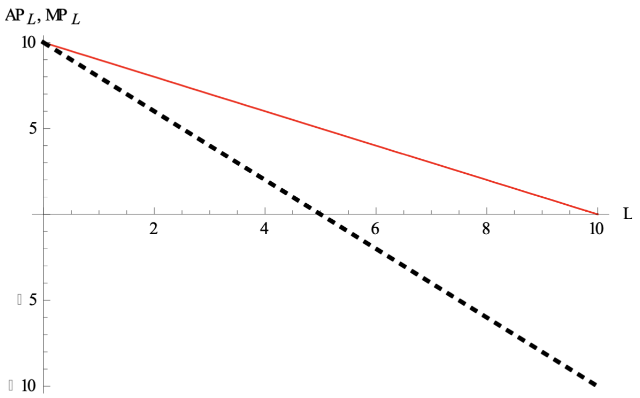

Figure 4: Prodotto medio (linea rossa), Prodotto marginale (linea tratteggiata nera).

(C) La funzione, o tecnologia, di produzione è $Q = 10L - L^2$. Per $L = 2$, l'unico livello di output tecnologicamente efficiente è $Q = 2 \cdot 10 - 22 = 16$.
Pertanto, per $L = 2$, tutti i piani di produzione tali che $Q < 16$ saranno piani tecnologicamente inefficienti, mentre tutti i piani tali che $Q > 16$ saranno piani tecnologicamente inattuabili. Da ciò è possibile concludere che:

1. **B** è il piano tecnologicamente efficiente;
2. I piani **C** e **E** sono tecnologicamente inefficienti;
3. I piani **A** e **D** sono tecnologicamente inattuabili

Tutte queste considerazioni possono essere riassunte attraverso il seguente diagramma:

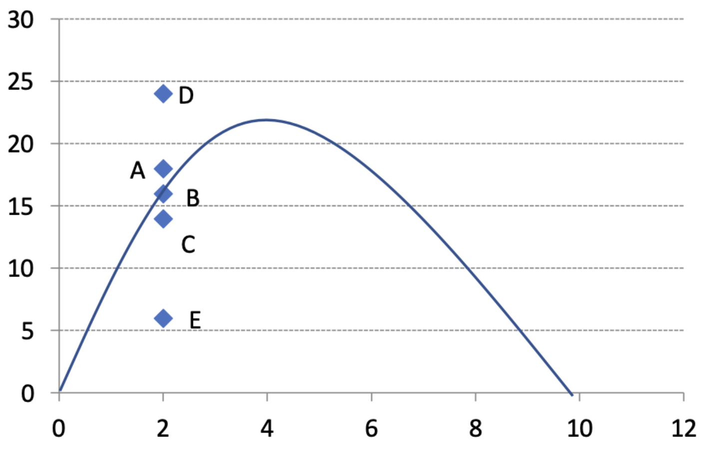

Figure 5: Tecnologia e output efficiente

Esercizio 3

Funzione di produzione: $Q = 2(5L^2 - L^3/2)$

(A) Studiate l'andamento del prodotto medio e del prodotto marginale.

(B) Disegnate i grafici della produzione e dei prodotti medio e marginale.

(C) Con $L = 4$, valutate i seguenti piani:

$$Q_A = 32, Q_B = 15, Q_C = 38, Q_D = 44, Q_E = 96$$

Classificateli.

Soluzione

(A) La produttività media, o prodotto medio, di un fattore o input di produzione misura la produzione totale per unità di fattore utilizzato, mentre il prodotto marginale misura l'incremento di prodotto dovuto ad un'unità aggiuntiva dello stesso input. Dal punto di vista geometrico, il prodotto medio è pari al coefficiente angolare del segmento che congiunge l'origine degli assi e ogni punto della funzione di produzione, mentre il prodotto marginale è pari al coefficiente angolare della tangente in ogni punto della funzione di produzione. Le due formule che descrivono l'andamento del prodotto medio e marginale sono:

$$AP_L = \frac{Q}{L}, \quad MP_L = \frac{\Delta Q}{\Delta L}$$

Nel caso della funzione di produzione $Q = 2(5L^2 - L^3/2)$, è possibile scrivere:

$$AP_L = \frac{2(5L^2 - L^3/2)}{L} = 10L - L^2, \quad MP_L = \frac{d[2(5L^2 - L^3/2)]}{dL} = 20L - 3L^2$$

Entrambe queste grandezze presentano un andamento non monotono all'aumentare di L. In particolare, il prodotto medio risulterà crescente per valori di L compresi tra 0 e 5 e decrescente per valori compresi tra 5 e 10. Per $L = 5$, inoltre, la curva AP_L raggiungerà il suo massimo. Il prodotto marginale risulterà crescente per valori di L compresi tra 0 e $\frac{10}{3}$ e decrescente per valori compresi tra $\frac{10}{3}$ e $\frac{20}{3}$. Per $L = \frac{10}{3}$, la curva MP_L raggiungerà il suo massimo.

(B) Il diagramma superiore indica l'andamento della funzione di produzione, mentre il diagramma inferiore indica l'andamento del prodotto medio (linea piena rossa) e del prodotto marginale (linea nera tratteggiata).

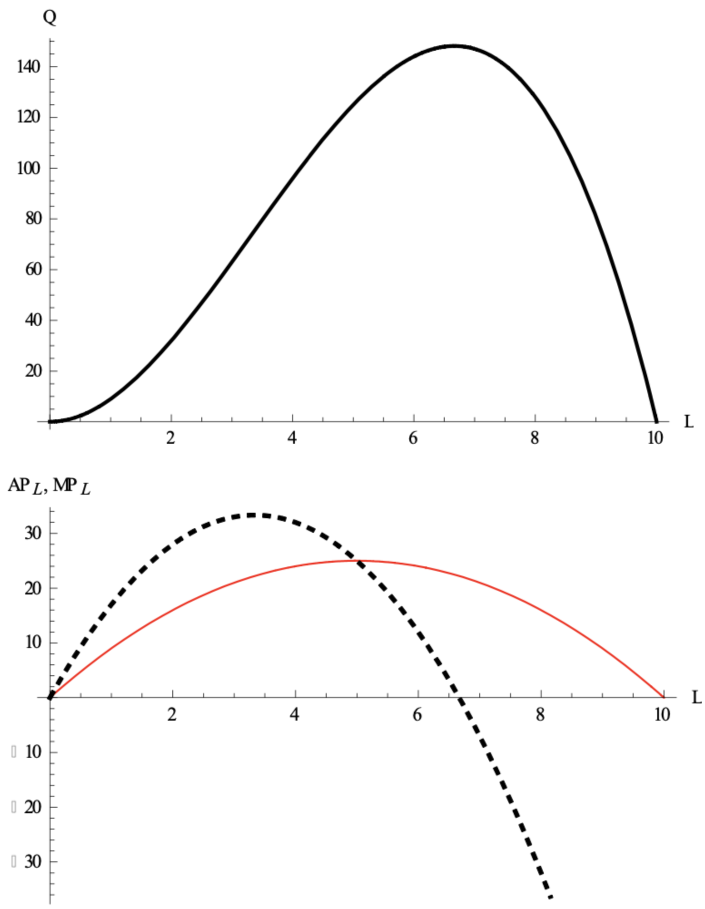

Figure 6: Funzione di produzione (linea nera); Prodotto medio (linea rossa), Prodotto marginale (linea tratteggiata).

Dal diagramma inferiore è possibile osservare le seguenti caratteristiche:

1. La curva del prodotto marginale presenta un massimo in corrispondenza di $L = \frac{10}{3}$ ed un punto di intersezione con l'asse delle ascisse in corrispondenza del punto di massimo della funzione di produzione;
2. La curva del prodotto medio non è mai negativa e presenta gli stessi punti di intersezione con l'asse delle ascisse della funzione di produzione: $L = 0$ e $L = 10$;
3. Le due curve si intersecano in corrispondenza del punto di massimo della curva del prodotto medio: $L = 5$.

(C) La tecnologia di produzione in analisi è $Q = 2\left(5L^2 - \frac{L^3}{2}\right)$. Per $L = 4$, l'unico livello di output tecnologicamente efficiente è

$$Q = 2\left(5 \cdot 4^2 - \frac{4^3}{2}\right) = 96.$$

Pertanto, per $L = 4$, tutti i piani di produzione tali che $Q < 96$ saranno piani tecnologicamente *inefficienti*, mentre tutti i piani tali che $Q > 96$ saranno piani tecnologicamente *inattuabili*. Da ciò è possibile concludere che:

1. il piano **E** è l'unico piano tecnologicamente efficiente;
2. i piani **A**, **B**, **C** e **D** sono tecnologicamente inefficienti.

Tutte queste considerazioni possono essere riassunte attraverso il seguente diagramma:

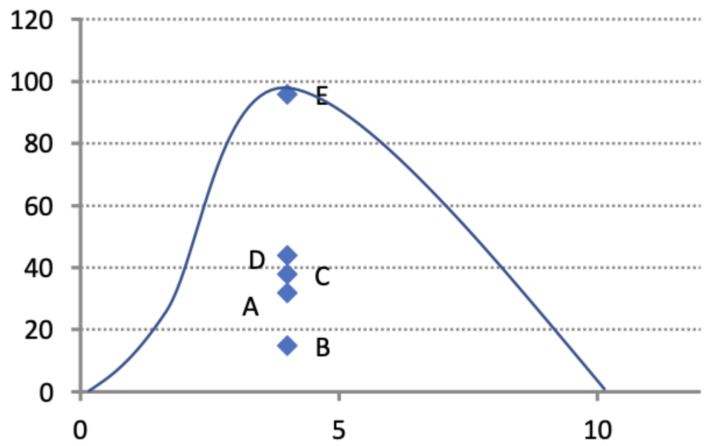

Figure 7: Tecnologia e output efficiente

Esercizio 4

Funzione di produzione di un'impresa è data dalla seguente espressione:

$$Q = L^{2/3}K^{1/3}$$

dove Q indica l'output annuo, L la quantità annua dell'input lavoro (ora-uomo) e K la quantità annua dell'input capitale (ore-macchina).

(A) Determinate l'isoquanto per $Q = 10$ e disegnatelo.

(B) Trovate l'equazione generica dell'isoquanto per $Q \neq 0$.

(C) L'isoquanto mostra un saggio marginale di sostituzione tecnica decrescente?

Nota teorica – Isoquanti e sostituibilità tra fattori

Un **isoquanto** rappresenta tutte le combinazioni di input (lavoro L e capitale K) che permettono di ottenere lo stesso livello di output.

$$Q = f(L, K) = \bar{Q} \Rightarrow K = K(L)$$

Il **saggio marginale di sostituzione tecnica** ($MRTS_{L,K}$) misura il tasso al quale l'impresa può sostituire il capitale con il lavoro, mantenendo costante l'output:

$$MRTS_{L,K} = \frac{MP_L}{MP_K}$$

Isoquanti convessi all'origine indicano un $MRTS_{L,K}$ decrescente: man mano che si sostituisce lavoro a capitale, servono quantità crescenti di lavoro per compensare una stessa riduzione di capitale.

Soluzione

(A) L'equazione dell'isoquanto corrispondente a $Q = 10$ è:

$$K = \frac{1000}{L^2}.$$

Il grafico dell'isoquanto è il seguente:

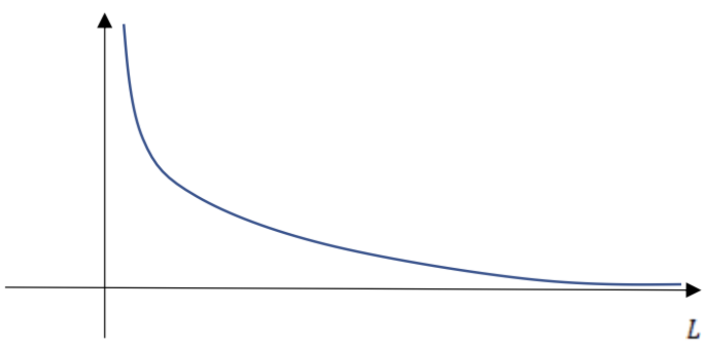

Figure 8: Isoquanto

(B) Per trovare l'equazione generale di un isoquanto, ricaviamo K in funzione di L dalla funzione di produzione.

Dato che

$$Q = L^{2/3}K^{1/3},$$

l'equazione generale di un isoquanto per questa funzione di produzione è:

$$K = \frac{Q^3}{L^2}.$$

(C) Tale isoquanto è caratterizzato da un tasso marginale di sostituzione tecnica decrescente. Ciò si può osservare dal grafico precedente, che risulta convesso verso l'origine, ma anche dal fatto che il $MRTS_{L,K}$ è decrescente al variare di L.
Infatti, partendo dalla funzione di produzione

$$Q = L^{2/3}K^{1/3},$$

è facile dimostrare che:

$$MRTS_{L,K} = \frac{\partial Q/\partial L}{\partial Q/\partial K} = \frac{2K}{L},$$

da cui si ottiene:

$$\frac{\partial(MRTS_{L,K})}{\partial L} = -\frac{2K}{L^2} < 0.$$

Esercizio 5

Funzione di produzione di un'impresa è data dalla seguente espressione:

$$Q = (L^{1/2} + K^{1/2})^2$$

dove Q indica l'output annuo, L la quantità annua dell'input lavoro (ora-uomo) e K la quantità annua dell'input capitale (ore-macchina).

(A) Determinate l'isoquanto per $Q = 100$ e disegnatelo.

(B) Trovate l'equazione generica dell'isoquanto per $Q \neq 0$.

(C) L'isoquanto mostra un saggio marginale di sostituzione tecnica decrescente?

Soluzione

(A) L'equazione dell'isoquanto corrispondente a $Q = 100$ è:

$$K = \left(10 - L^{1/2}\right)^2.$$

Il grafico dell'isoquanto è il seguente:

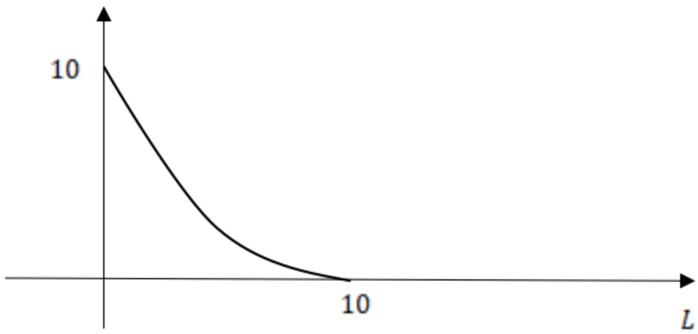

Figure 9: Isoquanto

(B) Per trovare l'equazione generale di un isoquanto, ricaviamo K in funzione di L dalla funzione di produzione.

Dato che

$$Q = \left(L^{1/2} + K^{1/2}\right)^2,$$

l'equazione generale di un isoquanto per questa funzione di produzione è:

$$K = \left(Q^{1/2} - L^{1/2}\right)^2.$$

(C) Tale isoquanto è caratterizzato da un tasso marginale di sostituzione tecnica decrescente.
Ciò si può vedere dal grafico di cui sopra, che è convesso verso l'origine, ma anche dal fatto che il $MRTS_{L,K}$ è decrescente al variare di L.
Infatti, partendo dalla funzione di produzione

$$Q = \left(L^{1/2} + K^{1/2}\right)^2,$$

è facile dimostrare che:

$$MRTS_{L,K} = \left(\frac{K}{L}\right)^{1/2},$$

da cui si ottiene:

$$\frac{\partial(MRTS_{L,K})}{\partial L} = -\frac{K^{1/2}}{2L^{3/2}} < 0.$$