Teoria del Consumatore e Teoria della Domanda

Nota teorica – Preferenze del consumatore e utilità

Paniere: combinazione di beni e servizi consumabili.
Preferenze: rappresentano il modo in cui il consumatore ordina i panieri in base alla desiderabilità.

Ipotesi sulle preferenze:

- **Completezza:** il consumatore può confrontare sempre due panieri (A preferito a B, B ad A, oppure indifferenza).
- **Transitività:** se A è preferito a B e B è preferito a C, allora A è preferito a C (vale anche per l'indifferenza).
- **Monotonicità / Non sazietà:** più è meglio. Avere più di almeno un bene è preferibile.

Ordinamento delle preferenze:

- **Ordinale:** classifica i panieri in ordine di preferenza, ma non misura l'intensità.
- **Cardinale:** attribuisce un valore numerico che riflette anche l'intensità delle preferenze (ipotesi più forte, spesso non necessaria).

Funzione di utilità: Una funzione che assegna un numero ad ogni paniere, tale che se A è preferito a B, allora $U(A) > U(B)$.
La funzione rappresenta le preferenze quando queste soddisfano completezza, transitività e monotonicità.
L'utilità è un concetto ordinale: conta l'ordine, non la grandezza dei numeri.
Utilità marginale: L'utilità marginale di un bene è la variazione dell'utilità totale derivante dal consumo aggiuntivo di una unità in più di quel bene:

$$MU_y = \frac{\Delta U}{\Delta y}$$

È pari alla pendenza della funzione di utilità totale rispetto al bene y.
Principio dell'utilità marginale decrescente: All'aumentare del consumo di un bene, l'utilità marginale da quel bene tende a diminuire. Nel grafico: l'utilità marginale è la pendenza della curva di utilità totale e può essere anche rappresentata graficamente come funzione (MUy).
Curve di indifferenza: Luoghi geometrici dei panieri che generano lo stesso livello di utilità. Caratteristiche principali:

- inclinazione negativa (se i beni sono desiderati);
- non si intersecano mai;
- ogni punto del piano corrisponde a una curva;
- sono sottili (non spesse).

Saggio Marginale di Sostituzione (MRS): Il saggio marginale di sostituzione misura la disponibilità di un consumatore a sostituire un bene con un altro mantenendo lo stesso livello di soddisfazione (utilità):

$$MRS_{x,y} = \frac{dx}{dy} \quad \text{(lungo una curva di indifferenza)} = \frac{MU_x}{MU_y}$$

Il MRS decresce lungo la curva: le curve sono **convesse** all'origine.
Vincolo di bilancio: Rappresenta le combinazioni di beni acquistabili dati reddito I e prezzi p_x, p_y:

$$I = p_x x + p_y y$$

Scelta ottima del consumatore: È il punto in cui il consumatore massimizza l'utilità date le sue risorse. **Condizione di tangenza:**

$$MRS_{x,y} = \frac{MU_x}{MU_y} = \frac{p_x}{p_y}$$

Nel punto di ottimo, la curva di indifferenza è tangente alla retta di bilancio. Il consumatore eguaglia il tasso a cui è disposto a sostituire un bene con l'altro con il tasso a cui il mercato consente di farlo.

Esercizio 1

Un consumatore ha a disposizione un reddito $I = 24$ da spendere per l'acquisto di due beni x e y.

(A) Dati i prezzi $p_x = 3$ e $p_y = 2$, determinate il vincolo di bilancio del consumatore e rappresentatelo in uno spazio cartesiano $\langle x, y \rangle$.

(B) Determinate quali panieri risultano essere economicamente accessibili:
$A \equiv \langle 3, 1 \rangle$, $B \equiv \langle 5, 5 \rangle$, $C \equiv \langle 5, 4 \rangle$, $D \equiv \langle 2, 9 \rangle$, $E \equiv \langle 6, 1 \rangle$, $F \equiv \langle 0, 12 \rangle$.

(C) Indicate dove si posiziona ognuno dei precedenti panieri relativamente alla retta di bilancio del consumatore.

Soluzione

(A) Il vincolo di bilancio è: $3x + 2y = 24$.
Riscrivendo il vincolo in modo da esplicitare la quantità del bene y: $y = 12 - \frac{3}{2}x$.

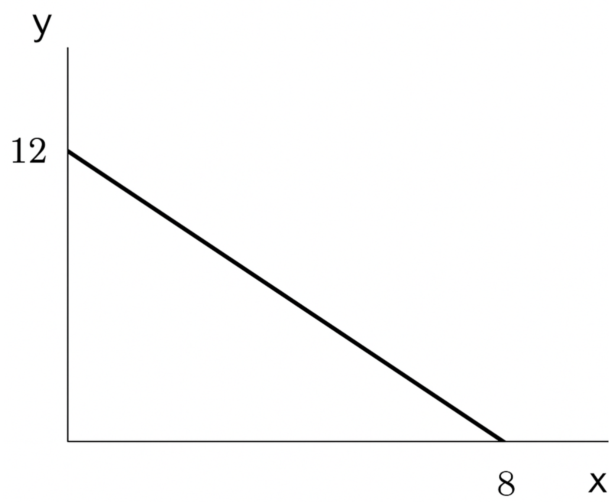
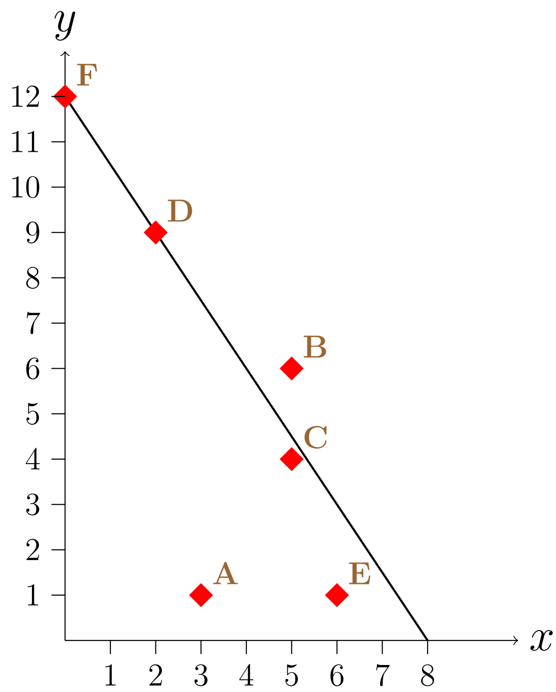


Figure 1: Insieme di bilancio

(B) Per ognuno dei 6 panieri è possibile constatare che:
Paniera A: Spesa da sostenere per l'acquisto di A $\rightarrow 3 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 11 < I = 24$
Paniera B: Spesa da sostenere per l'acquisto di B $\rightarrow 3 \cdot 5 + 2 \cdot 5 = 25 > I = 24$
Paniera C: Spesa da sostenere per l'acquisto di C $\rightarrow 3 \cdot 5 + 2 \cdot 4 = 23 < I = 24$
Paniera D: Spesa da sostenere per l'acquisto di D $\rightarrow 3 \cdot 2 + 2 \cdot 9 = 24 = I = 24$
Paniera E: Spesa da sostenere per l'acquisto di E $\rightarrow 3 \cdot 6 + 2 \cdot 1 = 20 < I = 24$
Paniera F: Spesa da sostenere per l'acquisto di F $\rightarrow 3 \cdot 0 + 2 \cdot 12 = 24 = I = 24$

In base ai dati ottenuti è possibili concludere che:
- I panieri A, C, D, E e F sono tutti economicamente accessibili, ossia sono inclusi nell'insieme di bilancio del consumatore;
- Il paniere B non è economicamente accessibile, ossia non è incluso nell'insieme di bilancio del consumatore.

(C) Il paniere B si trova al di sopra della retta di bilancio, i panieri A, C ed E si trovano al di sotto e i panieri D ed F si trovano sulla retta di bilancio.



Esercizio 2

Nota teorica – Problema del consumatore e condizione di ottimo

Il problema del consumatore consiste nel massimizzare l'utilità soggetta a un vincolo di bilancio:

$$\max_{x,y} U(x,y) \quad \text{s.t.} \quad p_x x + p_y y = I$$

La condizione di ottimo (tangenza tra retta di bilancio e curva di indifferenza) è:

$$\frac{MU_x}{MU_y} = \frac{p_x}{p_y} \quad \text{ovvero} \quad MRS_{x,y} = \frac{p_x}{p_y}$$

Considerate la funzione di utilità:

$$U(x,y) = \frac{x^2 y^b}{b}, \quad b > 0,$$

e un vincolo di bilancio pari a: $I = p_x x + p_y y$.

(A) Determinate le funzioni di domanda del bene x e del bene y.

(B) Determinate la scelta ottimale per $I = 24$, $p_x = 3$, $p_y = 2$ e $b = 2$.

(C) Calcolate l'elasticità della domanda di x rispetto al suo prezzo p_x, e l'elasticità incrociata rispetto al prezzo dell'altro bene p_y, in corrispondenza della scelta ottimale.

Soluzione

(A) Per ottenere le funzioni di domanda per il bene x e il bene y è necessario mettere a sistema la condizione di ottimo del consumatore, $MRS_{x,y} = \frac{P_x}{P_y}$, con il suo vincolo di bilancio, $I = p_x x + p_y y$.
Il saggio marginale di sostituzione data la funzione di utilità in esame è:

$$MRS_{x,y} = \frac{MU_x}{MU_y} = \frac{2xy^b}{b}\frac{1}{x^2y^{b-1}} = \frac{2y}{bx}$$

Il sistema da risolvere consiste nella condizione di ottimo e nel vincolo di bilancio: Partiamo dal sistema:

$$\begin{cases} \frac{2y}{bx} = \frac{P_x}{P_y} \\ I = P_x x + P_y y \end{cases}$$

Dalla prima equazione ricaviamo y in funzione di x:

$$\frac{2y}{bx} = \frac{P_x}{P_y} \quad \Rightarrow \quad 2y = \frac{P_x bx}{P_y} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{P_x bx}{2P_y}$$

Sostituendo nel vincolo di bilancio:

$$I = P_x x + P_y y = P_x x + P_y \left(\frac{P_x bx}{2P_y}\right) = P_x x + \frac{P_x bx}{2}$$

Raccogliendo x:

$$I = P_x x \left(1 + \frac{b}{2}\right) = P_x x \cdot \frac{2+b}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2I}{P_x(2+b)}$$

Sostituendo in y:

$$y = \frac{P_x b x}{2P_y} = \frac{P_x b}{2P_y} \cdot \frac{2I}{P_x(2+b)} = \frac{bI}{P_y(2+b)}$$

Quindi la soluzione è:

$$x^* = \frac{2I}{P_x(2+b)}, \qquad y^* = \frac{bI}{P_y(2+b)}.$$

(B) Per $I = 24$, $p_x = 3$, $p_y = 2$ e $b = 2$, la scelta ottima è

$$x^* = \frac{2 \cdot 24}{3 \cdot 4} = 4, \quad y^* = \frac{2 \cdot 24}{2 \cdot 4} = 6$$

Nota teorica – Elasticità della domanda

L'**elasticità della domanda rispetto al prezzo** misura la reattività della quantità domandata a variazioni del prezzo:

$$\varepsilon_{x,p_x} = \frac{\partial x}{\partial p_x} \cdot \frac{p_x}{x}$$

Elasticità incrociata misura la variazione della domanda di un bene in risposta alla variazione del prezzo di un altro:

$$\varepsilon_{x,p_y} = \frac{\partial x}{\partial p_y} \cdot \frac{p_y}{x}$$

(C) Con riferimento al bene x le elasticità della domanda rispetto ai prezzi sono:

$$\varepsilon_{x,p_x} = \frac{\partial x}{\partial p_x}\frac{p_x}{x} = -\frac{2I}{(b+2)p_x^2}\frac{p_x}{x} = -\frac{2I}{(b+2)p_x}\frac{(b+2)p_x}{2I} = -1 \quad \text{(unitaria)}$$

$$\varepsilon_{x,p_y} = 0 \quad \text{(nessuna relazione)}$$

Dalla precedente formula è possibile concludere che l'elasticità della domanda del bene x rispetto al prezzo non dipende dalla scelta ottimale del consumatore ed è sempre pari a -1.
Inoltre, poiché la funzione di domanda di x non presenta nessuna dipendenza diretta con il prezzo di y è possibile concludere che al variare di p_y la quantità domandata di x resterà costante, e quindi che l'elasticità incrociata è nulla.

Esercizio 3

Nota teorica – Complementarietà e sostituibilità

La relazione tra due beni può essere:

- **Complementarietà:** se $\varepsilon_{x,p_y} < 0$, all'aumentare del prezzo di y, la domanda di x diminuisce.
- **Sostituibilità:** se $\varepsilon_{x,p_y} > 0$, all'aumentare del prezzo di y, la domanda di x aumenta.

Le preferenze di un individuo/consumatore sono date da:

$$U(X,Y) = (X-4)(Y-4), \quad x \geq 4, \quad y \geq 4.$$

Il prezzo del bene X è di 2€ per unità, il prezzo del bene Y è di 2€ per unità e il reddito dell'individuo è 40€.

(A) Determinate il paniere ottimale scelto dall'individuo specificando le quantità acquistate di ciascun bene dati i prezzi $p_x = p_y = 2$ e il reddito $I = 40$.

(B) Calcolate il valore dell'elasticità incrociata della domanda di x rispetto al prezzo di y in corrispondenza del paniere ottimale e stabilite se la relazione tra i due beni è di complementarietà o di sostituibilità.

(C) Come varierebbe la scelta ottima del consumatore se, a parità di reddito e di prezzo del bene y, p_x passasse da 2€ a 1€?

Soluzione

(A) Il consumatore risolve il seguente problema di massimizzazione vincolata:

$$argmax_{x,y} \ (x-4)(y-4)$$

$$s.v. \quad I = p_x x + p_y y$$

Per ottenere le funzioni di domanda per il bene x e il bene y, mettiamo a sistema la condizione di ottimo del consumatore (che poi altro non è che la curva reddito-consumo), $MRS_{x,y} = \frac{p_x}{p_y}$, con il suo vincolo di bilancio:

$$\begin{cases} \frac{y-4}{x-4} = \frac{p_x}{p_y} \\ I = p_x x + p_y y \end{cases}$$

Le corrispondenti funzioni di domanda sono:

$$x = \frac{I + 4(p_x - p_y)}{2p_x}, \quad y = \frac{I - 4(p_x - p_y)}{2p_y}$$

Inserendo i parametri relativi ai prezzi, $p_x = p_y = 2$, e al reddito, $I = 40$, otteniamo:

$$(x^*, y^*) = (10, 10)$$

(B) : L'elasticità della domanda di x rispetto a p_y si scrive:

$$\varepsilon_{x,p_y} = \frac{dx}{dp_y}\frac{p_y}{x} = -\frac{2}{p_x}\frac{p_y}{x} = -\frac{2}{p_x}\frac{2p_y p_x}{I + 4(p_x - p_Y)} = -\frac{4p_y}{I + 4(p_x - p_y)}$$

In corrispondenza del paniere ottimale, l'elasiticità sarà:

$$\varepsilon_{x,p_y} = -\frac{4 \cdot 2}{40} = -\frac{1}{5} = -0.2$$

Poiché si ha che $\varepsilon_{x,p_y} < 0$, allora è possibile concludere che x e y si trovano in una relazione di complementarietà.

(C) Date le due funzioni di domanda determinate nel punto (A), se, a parità di reddito e di prezzo del bene y, p_x passasse da 2€ a 1€ il nuovo paniere ottimale sarebbe:

$$(x', y') = \left(\frac{36}{2}, \frac{44}{4}\right) = (18, 11)$$

Esercizio 4

Le preferenze di un individuo/consumatore tra bene X e bene Y sono date da:

$$U(X,Y) = \frac{1}{2}(X + Y^{1/2})$$

Il prezzo del bene X è pari a 6€ per unità, mentre quello del bene Y è pari a 3€ per unità. Il consumatore ha a disposizione un reddito complessivo pari a 45€.

(A) Determinate (numericamente) il paniere ottimale scelto dall'individuo.

(B) Supponendo che il prezzo del bene X scenda a 3€, calcolate il nuovo paniere ottimale del consumatore.

(C) Mettendo a confronto i due panieri ottimali, calcolate l'effetto sostituzione e l'effetto reddito relativamente alla quantità ottima del bene X, e stabilite se questo bene appartiene alla categoria dei beni normali, inferiori o di Giffen.

Nota teorica – Funzione di utilità quasi-lineare e scelte ottime

Una funzione di utilità quasi-lineare ha la forma:

$$U(x,y) = v(x) + by$$

Dove v(x) cresce in x e b è una costante positiva. Possono essere usate per descrivere le preferenze di un consumatore che acquista la stessa quantità di un prodotto indipendentemente dal suo reddito

Soluzione

(A) Il consumatore si trova ad affrontare il seguente problema di massimizzazione vincolata:

$$argmax \left\{ \frac{1}{2}(X + Y^{1/2}) \right\}$$

$$s.v. \quad I = p_x x + p_y y \quad \Rightarrow \quad 45 = 6x + 3y$$

La soluzione del problema è data dal sistema:

$$\begin{cases} MRS_{x,y} = \frac{p_x}{p_y} \\ I = p_x x + p_y y \end{cases}$$

Sostituendo i valori corrispondenti si ottiene:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(4\sqrt{y}) = \frac{6}{3} \quad \Rightarrow \quad y^* = 1 \\ 45 = 6x + 3y \quad \Rightarrow \quad x^* = 7 \end{cases}$$

Il paniere ottimale A sarà pertanto:

$$(X_A, Y_A) = (7, 1)$$

(B) Nel caso in cui il prezzo di X passi da 6 a 3, la scelta del consumatore cambia e sarà data dalla soluzione del seguente sistema:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(4\sqrt{y}) = \frac{3}{3} & \Rightarrow \quad y^* = \frac{1}{4} \\ 45 = 3x + 3y & \Rightarrow \quad x^* = \frac{59}{4} \end{cases}$$

Il paniere ottimale B sarà pertanto:

$$(X_B, Y_B) = \left(\frac{1}{4}, \frac{59}{4}\right)$$

Da cui, mettendo a confronto X_B con X_A è possibile concludere che una riduzione del prezzo di X del 50% ha generato un aumento della quantità domandata pari:

$$X_B - X_A = \frac{31}{4} = 7.75 \quad EFFETTO\ PREZZO$$

(C) Per scomporre l'effetto di prezzo in effetto sostituzione ed effetto reddito, procediamo per "step":

1. Identifichiamo due panieri che vogliamo mettere a confronto:
   - Paniere ottimo iniziale: $(X_A, Y_A) = (7, 1)$
   - Paniere ottimo finale: $(X_B, Y_B) = \left(\frac{1}{4}, \frac{59}{4}\right)$
2. Determiniamo il paniere intermedio, C. Questo deve:
   - riflettere la diminuzione di prezzo del bene x, deve dunque trovarsi su un vincolo di bilancio parallelo a quello nuovo;
   - garantire al consumatore la stessa utilità iniziale, deve dunque trovarsi sulla curva di indifferenza iniziale).

   Per calcolare il paniere intermedio, procediamo prima con il calcolo del livello di utilità che caratterizza il paniere ottimale, $U(A)$:

   $$U(A) = U(X_A, Y_A) = \frac{1}{2}(7 + 1^{1/2}) = 4$$

   Una volta stabilito che $U(A) = 4$, passiamo a risolvere il seguente sistema:

   $$\begin{cases} \frac{1}{2}(X + Y^{1/2}) = 4 \\ MRS_{x,y} = \frac{3}{3} = 1 & \Rightarrow \quad 2\sqrt{Y} = 1 \end{cases}$$

   Dove manteniamo fisso il livello di utilità del paniere A (prima equazione) e usiamo il nuovo prezzo del bene X (passa da 6 a 3 nella seconda equazione). Operando per sostizuione otteniamo:

   $$(X_C, Y_C) = \left(\frac{15}{2}, \frac{1}{4}\right)$$

3. Con riferimento alla quantità ottima di X è possibile procedere con la seguente scomposizione dell'effetto prezzo in:

- **Effetto Sostituzione**: $X_C - X_A = \frac{15}{2} - 7 = \frac{1}{2} = 0.5$
- **Effetto Reddito**: $X_B - X_C = \frac{59}{4} - \frac{15}{2} = \frac{29}{4} = 7.25$

Sommando tra loro l'effetto sostituzione e l'effetto reddito, è possibile osservare come il risultato confermi l'effetto prezzo di 3 unità (EFFETTO SOSTITUZIONE+EFFETTO REDDITO $= 0,5 + 7,25 = 7,75$).

Nota teorica – Scomposizione effetto prezzo: ES e ER

L'effetto di una variazione di prezzo si scompone in:

- **Effetto sostituzione (ES):** Quando il prezzo del bene X diminuisce, tale bene diventa più conveniente rispetto al bene Y (Px/Py). L' effetto sostituzione è dato dalla variazione nella quantità domandata di un bene quando il prezzo del bene cambia, mantenendo costanti tutti gli altri prezzi e il livello di utilità;
- **Effetto reddito (ER):** Al diminuire del prezzo del bene X, il potere d'acquisto del consumatore aumenta. L' effetto reddito è dato dalla variazione nella quantità domandata di un bene al variare del potere di acquisto del consumatore mantenendo costanti tutti i prezzi.

La loro somma dà l'effetto totale:

$$ET = ES + ER$$

Inoltre, poiché si ha che l'effetto sostituzione (ES) ed effetto reddito (ER) hanno lo stesso segno, possiamo concludere che il bene X appartiene alla categoria dei beni normali.